

PHYSIKALISCHE TECHNIK

02

© Dipl.-Ing. (TU) Jürgen Wemheuer

<https://ewla.de/>

wemheuer@ewla.de

(Stand: 04.10.2015)

Messen physikalischer Größen

Messen ist der experimentelle Vorgang, bei dem für die **Messgröße** (also die zu messende physikalische Größe) ein **Messwert** als Vielfaches einer **Einheit** ermittelt wird.

(DIN 1219)

Messgröße: Zeit t

Messwert: 5 Sekunden (kurz: 5 s)

Messergebnis: $t = 5 \text{ s}$

Man unterscheidet:

- **Indirektes Messen**
- **Direktes Messen**

Eng verwandt mit **Messungen** sind das **objektive Prüfen**, das **Eichen** und das **Kalibrieren**.

Indirektes Messen

Beim indirekten Messen wird die Messgröße **nicht** unmittelbar durch einen Messvorgang festgestellt.

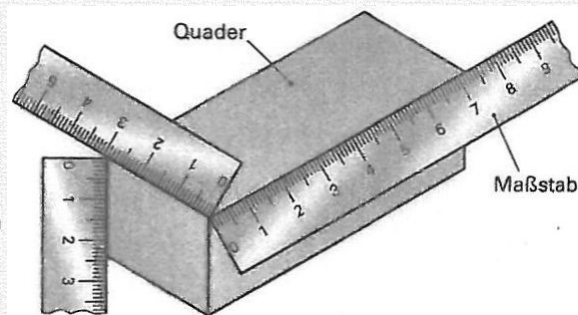
Die Messgröße wird durch eine oder mehrere Messungen und anschließender **Berechnung** mit einer Größengleichung (Formel) ermittelt.

Beispiel:

Volumenbestimmung

(Länge * Breite * Höhe)
7,2 cm * 2,9 cm * 2,4 cm

$$\begin{aligned} V &= l * b * h \\ &= 7,2 \text{ cm} * 2,9 \text{ cm} * 2,4 \text{ cm} \\ &= 50,1 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



Direktes Messen

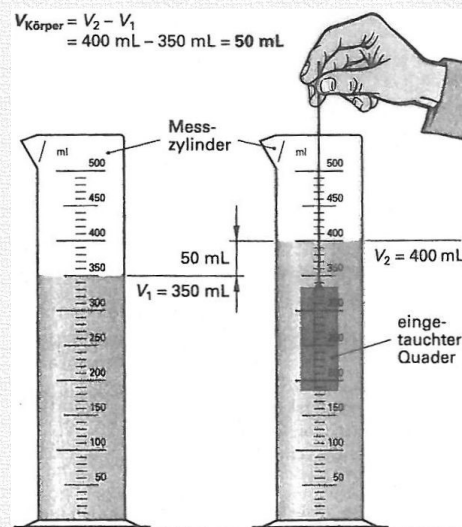
Beim direkten Messen wird die Messgröße **direkt** in einem Messvorgang ermittelt.

Beispiel: **Volumenbestimmung**

Taucht man einen Quader in einen teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Messzylinder ein, so kann man die Volumenzunahme unmittelbar ablesen und mit dem Quadervolumen gleichsetzen.

$$V = 50 \text{ mL} = 50 \text{ cm}^3$$

Vorteile / Nachteile?



Prüfen

Von **subjektivem Prüfen** spricht man, wenn mit den Sinnesorganen ein Sachverhalt **qualitativ** geprüft wird (zum Beispiel Sichtprüfung).

Beim **objektiven Prüfen** nimmt man **quantitative Messungen** vor, um festzustellen, ob bestimmte Bedingungen erfüllt sind.

In vielen Fällen wird **sowohl objektiv als auch subjektiv** geprüft. Bei der **TÜV-Prüfung** für Kraftfahrzeuge werden mit Messgeräten **objektiv** z.B. die Bremskräfte und Abgaskonzentrationen ermittelt, **subjektiv** werden Rostschäden und das Radlagerspiel festgestellt.

Eichen und Kalibrieren

Eine besondere Art des Prüfens ist das **Eichen**.

Hierbei stellt eine **Eichbehörde (Eichamt)** fest, ob **Messgeräte** innerhalb der vorgeschriebenen maximalen Abweichungen genau arbeiten. Grundsätzlich müssen alle Messgeräte geeicht werden, die zur Ermittlung von Kosten dienen, zum Beispiel Handelswaagen, Stromzähler etc.

Werden Messungen in der Art des Eichens von **nichtamtlichen** Stellen vorgenommen, wird der Vorgang als **Kalibrieren** bezeichnet.

Weitere verwandte Begriffe sind **Einmessen** und **Justieren**.

Messgenauigkeit

Messwerte sind grundsätzlich Werte mit **eingeschränkter Genauigkeit!**

Die Genauigkeit ist durch das **Messverfahren** bestimmt, mit dem der Messwert gewonnen wurde.

Messwerte – und die Ergebnisse von Berechnungen mit Messwerten – sind deshalb **nur so genau** anzugeben, wie es die Genauigkeit des gewählten Messverfahrens **erlaubt!**

Beispiel:

Ein Temperaturfühler habe eine Messgenauigkeit von $\pm 2 \text{ K}$. Wie sinnvoll ist dann eine digitale Temperaturanzeige mit einer Stelle nach dem Komma („20,4 °C“)?

Signifikante Ziffern

Signifikante Ziffern sind **die** Ziffern einer Messwertangabe, die aufgrund der Messgenauigkeit **berücksichtigt** werden **dürfen** (und **müssen**)!

Die letzte, am weitesten rechts stehende Ziffer ist immer diejenige, die **fehlerbehaftet** ist oder sein kann.

Der minimale Fehler an dieser Stelle beträgt ± 1 .

Alle weiteren Ziffernstellen nach rechts wären **sinnlos!**

Das bedeutet umgekehrt aber auch, dass man **Nullen** am Ende einer Maßzahl **nicht einfach weglassen** darf:

1,65 V kann bedeuten „zwischen 1,63 V und 1,67 V“

1,650 V bedeutet eher „zwischen 1,645 V und 1,655 V“

Aufrunden / Abrunden / Abschneiden

Eigentlich ganz einfach:

- folgt auf die letzte signifikante Ziffer eine **0 bis 4**:
 - wird **abgerundet**
- folgt auf die letzte signifikante Ziffer eine **5 bis 9**:
 - wird **aufgerundet**

Aber jetzt kommt's:

- folgt auf die letzte signifikante Ziffer **genau** die **5 (5,00...)**
 - runden Kaufleute auf
 - runden Techniker auf die **nächste gerade Zahl**:
 - 2,2500 -> 2,2
 - 2,3500 -> 2,4
- wahnsinnig schnell, aber mathematisch meistens grottenfalsch ist das **Abschneiden** nach der letzten signifikanten Stelle, zum Beispiel beim Programmieren mit dem Ganzzahl-Datentyp **int**:
 - 2,69 -> 2,6
 - hat in der digitalen Signalverarbeitung aber auch klare Vorteile...

Explizite Angabe der Genauigkeit

Bei der Angabe eines Messwertes ist immer zu hinterfragen:

- **Wie weit kann ich mich auf den angezeigten (ermittelten) Wert als korrekte Aussage über die zu messende Größe verlassen?**
 - Beispiel: Eine elektrische Stromstärke betrage exakt 5 A, wird auch exakt 5 A angezeigt?
- **Wie weit kann ich mich auf den festgestellten Zahlenwert verlassen?**
 - Beispiel: Heißt die Angabe „5“: geschätzt zwischen 0 und 10, vielleicht auch 6. Oder heißt die Angabe „5“: genau bis auf eine durch Schätzunsicherheit mögliche Abweichung $\pm 0,1$?
Im zweiten Falle wäre dann 5,0 zu schreiben. Das ist zwar mathematisch dasselbe, aber in der Messtechnik von anderer Qualität.
 - Beispiel: Welchen Sinn hat die Angabe „4,8376“ bei einer durch Fehlergrenzen möglichen Abweichung $\pm 0,1$? Die Angabe gaukelt eine nicht vorhandene Qualität vor und ist durch 4,8 zu ersetzen.

Ohne Angabe über die Zuverlässigkeit einer Messaussage ist die Aussage von zweifelhaftem Wert...

„Wer misst, misst Mist...“

- **Messgeräteabweichungen** als Folge der Unvollkommenheit der Konstruktion, Fertigung, Justierung (z. B. durch Werkstoffe, Fertigungstoleranzen)
- durch das **Messverfahren** bedingte Einflüsse durch Einwirkung der Messeinrichtung auf die Messgröße (z. B. *Eigenverbrauch des Messgerätes*)
- **Umwelteinflüsse**, wenn sich Einwirkungen aus der Umgebung ändern (z. B. *Temperatur, äußere elektrische oder magnetische Felder, Lage, Erschütterungen*)
- **Instabilitäten** des Wertes der Messgröße oder des Trägers der Messgröße (z. B. *statistische Vorgänge, Rauschen*)
- **Menschliche Einflüsse** durch unterschiedliche Eigenschaften und Fähigkeiten (z. B. *Aufmerksamkeit, Übung, Sehschärfe, Schätzvermögen, Parallaxe*)

Außerhalb der Diskussion stehen hier:

- Verfälschungen durch **Irrtümer** des Beobachters,
- Verfälschungen durch **ungeeignete** Mess- und Auswerteverfahren,
- Verfälschungen durch **Nichtbeachtung** bekannter Störgrößen.

Arten von Messabweichungen

- Messabweichungen haben **grundsätzlich** eine **systematische** und eine **zufällige** Komponente.
- Die systematische Komponente kann (auch durch Berechnung) null werden (kompensiert werden), die zufällige Komponente jedoch nicht.

Es gilt zu unterscheiden:

- Durch **systematische Messabweichungen** wird ein Messergebnis immer **unrichtig**.
- Durch **zufällige Messabweichungen** wird ein Messergebnis immer **unsicher**.

Systematische Messfehler

Eine einseitig gerichtete Abweichung, die durch *im Prinzip feststellbare Ursachen* bedingt ist, ist eine systematische Abweichung.

- Bei Wiederholungen einer Messung unter gleichen Bedingungen liegt **dieselbe** systematische **Messabweichung** vor; sie ist **aus den Messwerten nicht erkennbar**.
- Eine systematische Messabweichung hat Betrag und Vorzeichen.
- Eine systematische Messabweichung setzt sich additiv aus einer **bekannt**en und einer **unbekannt**en systematischen Messabweichung zusammen.
- Zur Berechnung eines Messergebnisses wird der Messwert um die bekannte systematische Messabweichung **berichtigt**.

Zufällige Messfehler

Eine nicht beherrschbare, nicht einseitig gerichtete Abweichung ist eine zufällige Abweichung.

- Bei Wiederholungen – selbst unter genau gleichen Bedingungen – werden die Messwerte voneinander abweichen: sie **streuen**.
- Zufällige Messabweichungen **schwanken** nach Betrag und Vorzeichen.
- Mit einer Fehlerrechnung können aus der Gesamtheit der Werte ein Mittelwert **M** und eine Messunsicherheit **u** berechnet werden. Der wahre Wert liegt (bei Abwesenheit systematischer Abweichungen) mit einer gewissen statistischen Sicherheit in einem Bereich **$[M-u, M+u]$** .

Mittelwertbildung

Um die Sicherheit einer Messung zu erhöhen, kann man **mehrere Messungen** (Anzahl n) für eine Messgröße vornehmen und den **Mittelwert aller Messwerte** als Messergebnis angeben.

Messung Größe	1	2	3	4	Mittelwert
Höhe	6,0 cm	6,1 cm	6,1 cm	5,9 cm	6,025 cm
Breite	12,0 cm	12,0 cm	11,9 cm	11,9 cm	11,95 cm
Länge	48,2 cm	47,9 cm	48,0 cm	48,0 cm	48,025 cm
Volumen	3470,4 cm ³	3506,3 cm ³	3484,3 cm ³	3370,1 cm ³	3457,7 cm ³

Mittelwert = Summe der Einzelwerte / Anzahl der Messwerte

Runden nicht vergessen: 2 signifikante Stellen -> $V = 3,5 \text{ dm}^3$

Angaben von Unsicherheiten

Für quantitative (zahlenmäßige) Angaben unterscheidet man in der Praxis zwei Arten von Angaben:

- **Absolute Messabweichung**

- Der absolute Messfehler hat immer einen Betrag, ein Vorzeichen und eine Einheit, nämlich stets dieselbe wie die Messgröße.

Beispiel:

$$U = 5,0 \text{ V} \pm 0,1 \text{ V}$$

- **Relative Messabweichung**

- Der relative Messfehler wird als dimensionslose Zahl (üblicherweise in Prozent) angegeben.

Beispiel:

$$R = 27,8 \text{ } \Omega \pm 5\%$$

Standardabweichung und Varianz

In der beschreibenden Statistik berechnet man das **arithmetische Mittel der Abweichungsquadrate** und nennt dieses die **Varianz**:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

n: Anzahl der Beobachtungswerte, x_i : i-ter Beobachtungswert, \bar{x} : Mittelwert

Viele Daten sind mit Einheiten behaftet, z.B. Meter (m) oder kg. Die Einheit für die Varianz wäre in diesen Fällen m^2 bzw. kg^2 .

Um wieder auf die ursprüngliche Einheit zu kommen, zieht man die Wurzel aus der Varianz.

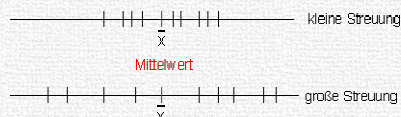
Dieser Wert wird **Standardabweichung** genannt:

$$\text{Standardabweichung} \quad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\text{Varianz}}$$

Standardabweichung

Die Standardabweichung ist ein Maß dafür, wie hoch die Aussagekraft des Mittelwertes ist.

- Eine kleine Standardabweichung bedeutet: alle Beobachtungswerte liegen nahe am Mittelwert.
- Eine große Standardabweichung bedeutet: die Beobachtungswerte sind weit um den Mittelwert gestreut.



Beispiel zur Berechnung

Im Beispiel verwenden wir die nebenstehende Messreihe mit 7 Messwerten. Zuerst berechnen wir den Mittelwert aus der Summe der einzelnen Messwerte, geteilt durch die Anzahl der Messungen:

$$M = (6,0 + 7,0 + 7,5 + 6,5 + 7,5 + 8,0 + 6,5) / 7 = 7$$

Hier ergibt sich ein Mittelwert von $M = 7,0$.

Anschließend wird die Varianz berechnet:

$$s^2 = ((6 - 7)^2 + (7 - 7)^2 + (7,5 - 7)^2 + (6,5 - 7)^2 + (7,5 - 7)^2 + (8 - 7)^2 + (6,5 - 7)^2) / 7 = 0,43$$

Die Standardabweichung ergibt sich nun aus der Quadratwurzel der Varianz:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{0,43} = 0,66$$

Angabe also: $U = 7,0 \text{ V} \pm 0,66 \text{ V}$

Messung	Messwert [V]
1	6,0
2	7,0
3	7,5
4	6,5
5	7,5
6	8,0
7	6,5